Solution de la Question 1, Exercice 22, TD9

Solution de l'exercice 1 Soit

$$(E) \qquad \arcsin(x) + \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned}(E) \text{ est bien définie en } x \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ -1 \leqslant \frac{x}{2} \leqslant 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ -2 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad -1 \leqslant x \leqslant 1.\end{aligned}$$

Fixons désormais $x \in [-1; 1]$. On a alors,

$$\begin{aligned}(E) \quad &\Rightarrow \quad \sin\left(\arcsin(x) + \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\Rightarrow \quad \sin\left(\arcsin(x)\right)\cos\left(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \sin\left(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right)\cos\left(\arcsin(x)\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\Rightarrow \quad x\cos\left(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \frac{x}{2}\cos\left(\arcsin(x)\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Or $\cos^2\left(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 1 - \sin^2\left(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 1 - \frac{x^2}{4}$. Donc

$$\cos\left(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \pm\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}.$$

Puisque $\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que $\cos\left(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right) \geqslant 0$ et donc $\cos\left(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$.
De même, $\cos\left(\arcsin(x)\right) = \sqrt{1 - x^2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}(E) \quad &\Rightarrow \quad x\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} + \frac{x}{2}\sqrt{1 - x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\Rightarrow \quad x^2\left(1 - \frac{x^2}{4}\right) + x^2\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)(1 - x^2)} + \frac{x^2}{4}\left(1 - x^2\right) = \frac{3}{4} \\ &\Rightarrow \quad x^2\left(1 - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} - \frac{x^2}{4}\right) + x^2\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)(1 - x^2)} = \frac{3}{4} \\ &\Rightarrow \quad x^2\left(\frac{5}{4} - \frac{x^2}{2}\right) + x^2\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)(1 - x^2)} = \frac{3}{4} \\ &\Rightarrow \quad x^2\left(5 - 2x^2\right) + 4x^2\sqrt{\frac{(4 - x^2)(1 - x^2)}{4}} = 3 \\ &\Rightarrow \quad 2x^2\sqrt{(4 - x^2)(1 - x^2)} = 2x^4 - 5x^2 + 3.\end{aligned}$$

Posons $X = x^2$, alors,

$$(E) \qquad \Rightarrow \qquad 2X\sqrt{(4-X)(1-X)} = 2X^2 - 5X + 3.$$

On note que 1 est une racine du polynôme de droite et ceci n'est intéressant que parce que nous avons déjà une factorisation à droite par $1 - X$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
(E) \qquad &\Rightarrow \qquad 2X\sqrt{(4-X)(1-X)} = 2\left(X^2 - \frac{5}{2}X + \frac{3}{2}\right) \\
&\Rightarrow \qquad 2X\sqrt{(4-X)(1-X)} = 2(X-1)\left(X - \frac{3}{2}\right) \\
&\Rightarrow \qquad 4X^2(4-X)(1-X) = 4(X-1)^2\left(X - \frac{3}{2}\right)^2 \\
&\Rightarrow \qquad X = 1 \text{ OU } X^2(4-X) = (1-X)\left(X - \frac{3}{2}\right)^2 \\
&\Rightarrow \qquad X = 1 \text{ OU } 4X^2 - X^3 = (1-X)\left(X^2 - 3X + \frac{9}{4}\right) \\
&\Rightarrow \qquad X = 1 \text{ OU } 4X^2 - X^3 = X^2 - 3X + \frac{9}{4} - X^3 + 3X^2 - \frac{9}{4}X \\
&\Rightarrow \qquad X = 1 \text{ OU } \frac{21}{4}X = \frac{9}{4} \\
&\Rightarrow \qquad X = 1 \text{ OU } X = \frac{3}{7} \\
&\Rightarrow \qquad x^2 = 1 \text{ OU } x^2 = \frac{3}{7} \\
&\Rightarrow \qquad x = 1 \text{ OU } x = -1 \text{ OU } x = \sqrt{\frac{3}{7}} \text{ OU } x = -\sqrt{\frac{3}{7}}.
\end{aligned}$$

Soit $f : x \mapsto \arcsin(x) + \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$. La fonction f est continue et strictement croissante sur $[-1;1]$. Donc par le théorème de la bijection, $f([-1;1]) = [f(-1); f(1)]$. Or

$$f(1) = \arcsin(1) + \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}.$$

De plus, la fonction f est impaire donc $f(-1) = -\frac{2\pi}{3}$. Donc $f([-1;1]) = \left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$. Donc $\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$. Donc par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires :

$$\exists! \alpha \in [-1;1], \quad f(\alpha) = \frac{\pi}{3}.$$

Mais puisque $f(0) = 0 < \frac{\pi}{3} < \frac{2\pi}{3} = f(1)$, par la stricte croissance de f, on obtient que

$$0 < \alpha < 1.$$

Ainsi, $\alpha \neq -1$, $\alpha \neq 1$, $\alpha \neq -\sqrt{\frac{3}{7}}$. Donc par la phase d'analyse précédente, on conclut que $\alpha = \sqrt{\frac{3}{7}}$. Conclusion,

$$\boxed{(E) \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \sqrt{\frac{3}{7}}.}$$